МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

ДВНЗ «КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

імені Вадима Гетьмана»

Кафедра інформатики та системології

**Лабораторна робота №2 (частина 1)**

з дисципліни «Моделювання складних систем»

на тему «Дослідження диференційної моделі Лоткі-Вольтера («хижак-жертва»)»

**Виконав:**

Буртовий О.В.,

Студент групи ІА-401

**Перевірив:**

Дербенцев В.Д

**КИЇВ КНЕУ 2022**

Теоретичні відомості про класичну модель типу Лоткі-Вольтера та їх модифікацію з логістичною поправкою, режими поведінки, які ці моделі можуть описувати при певних значеннях параметрів.

Класична модель Лоткі-Вольтера:

Модель Лоткі-Вольтера з логістичною поправкою:

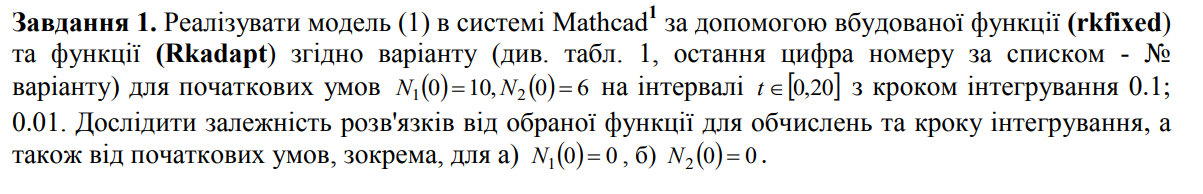
– чисельності 2 популяцій («хижаків», «жертв»), – швидкості їх зміни. – місткість середовища – максимально можливу чисельність популяції.

При цьому друга популяція для свого існування використовує або споживає першу, тому за умови відсутності хижаків (), чисельність популяції «жертв» зростає за логістичним законом зі швидкістю a; в іншому випадку швидкість залежить від інтенсивності міжвидової взаємодії (параметрів b, d).

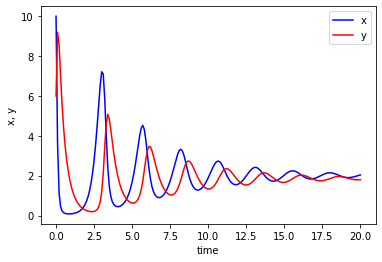
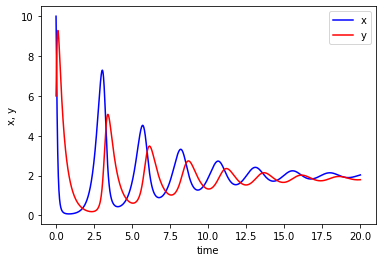
Аналогічно за відсутності «жертв» () швидкість спадання другої популяції («хижаків») пропорційна параметру c, перший доданок у 2-му рівнянні компенсує це спадання з параметром d, що характеризує інтенсивністю міжвидової взаємодії.

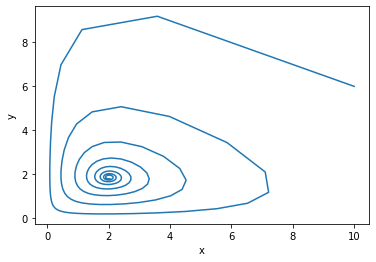
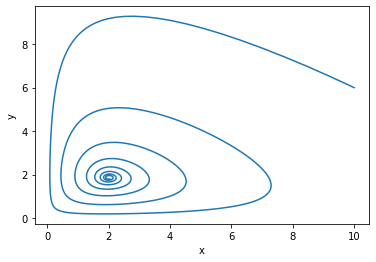
Параметри та враховують внутрішньовидову конкуренцію.

**Варіант №1**

****

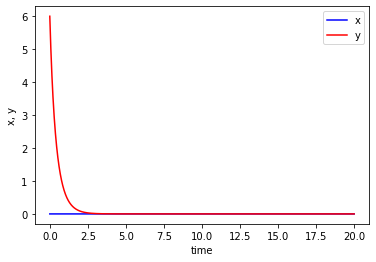
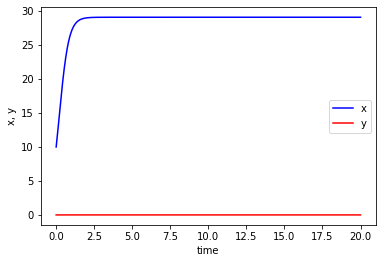
**Залежність розв’язків від кроку інтегрування:**

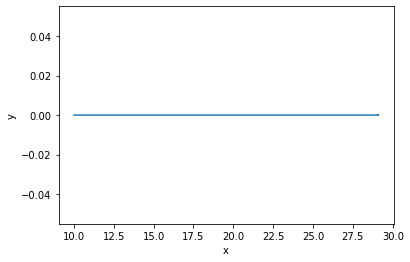
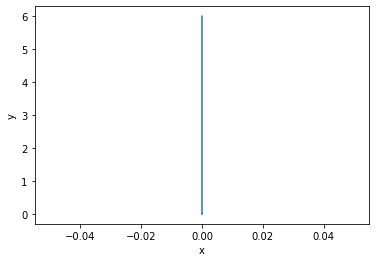




Ліворуч зображення – 0.01, праворуч – 0.1.

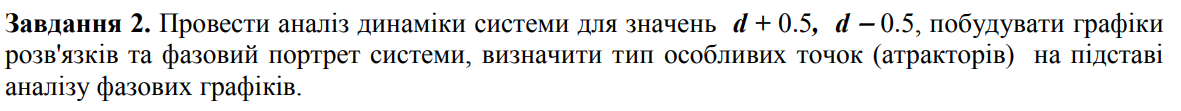
**Залежність розв’язків від початкових умов:**

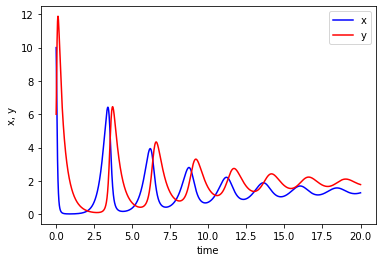
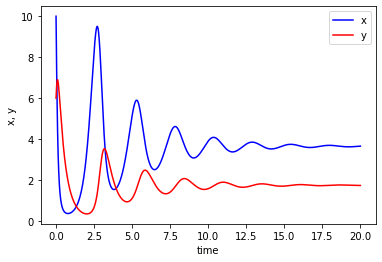
 

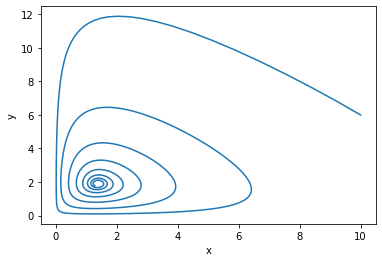
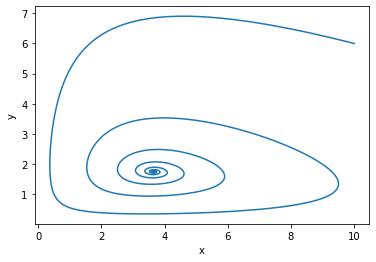


Ліворуч – N1 = 0, праворуч – N2 = 0.

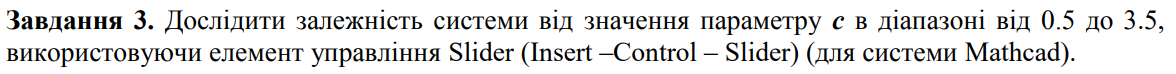
З графіків видно, що при зміні кроку інтегрування змінюється тільки частота точок на графіку. При зміні початкових умов, тобто кількість жертв чи хижаків дорівнює 0, в першому випадку кількість хижаків зменшується, в другому – кількість жертв збільшується.



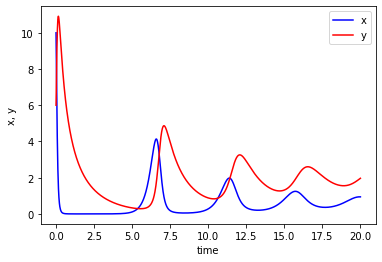
 

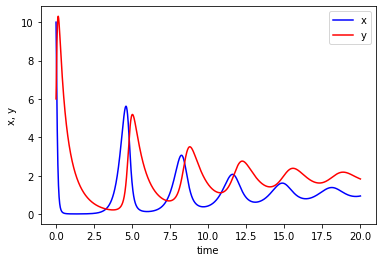
 

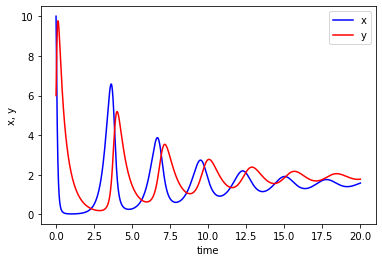
Ліворуч – d+0.5, праворуч – d–0.5. Параметр d характеризує інтенсивність міжвидової взаємодії. При його збільшенні кількості популяцій приблизно однакові, а при зменшенні – різниця збільшується. Тип особливої точки: фокус.

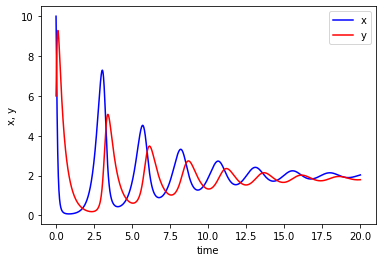


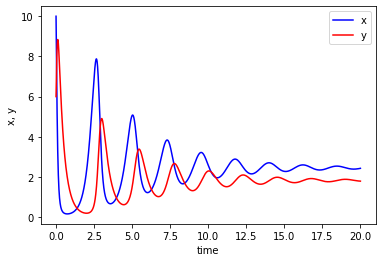
Задамо параметру c такі значення як 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3 та 3.5. Отримає результати:

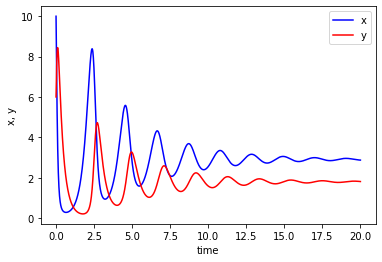


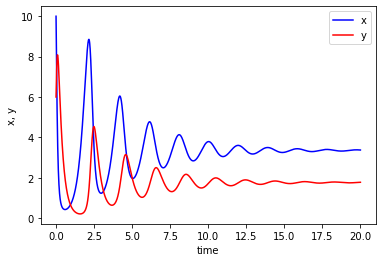




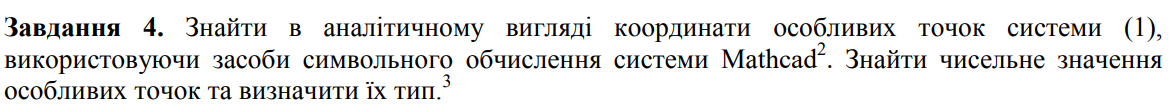




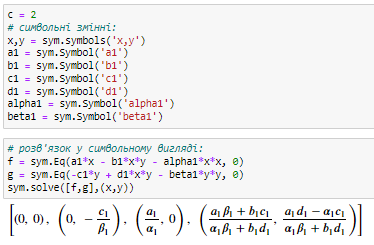




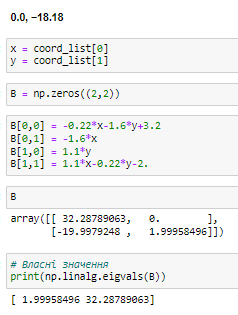
Параметр c – параметр, якому пропорційна швидкість спадання другої популяції. При його значення 0.5 різниця між кількостями популяцій велика; при зростанні цього значення до 2, різниця поступово зменшується; при зростанні з 2 до 3.5 різниця теж зростає.

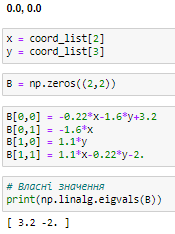
****

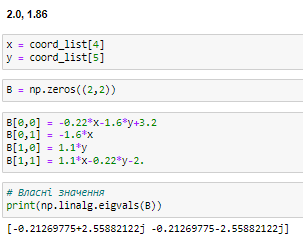
**Координати особливих точок в символьному вигляді:**

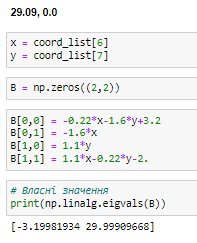
****

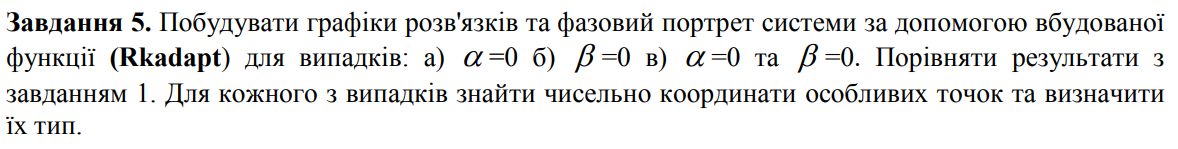
**Чисельне значення та тип:**

Нестійкий вузол (дійсні додатні)

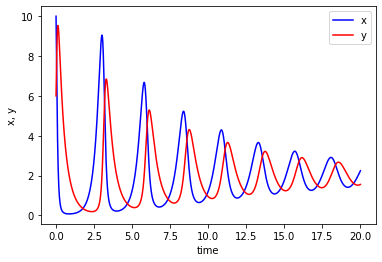
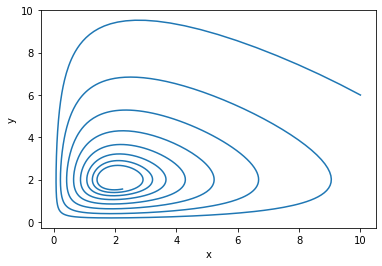
 Сідло (дійсні різних знаків)

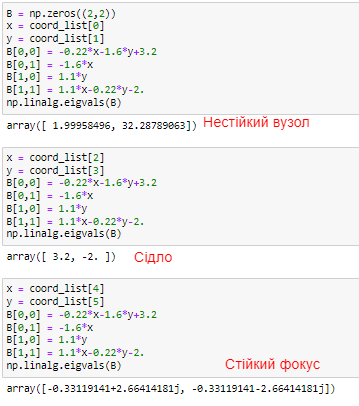
Стійкий фокус (дійсні < 0, уявні != 0)

 Сідло (дійсні різних знаків)

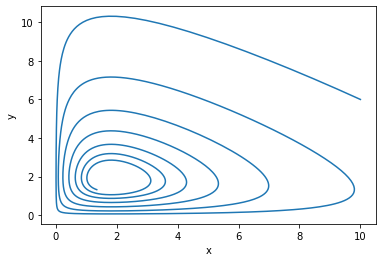
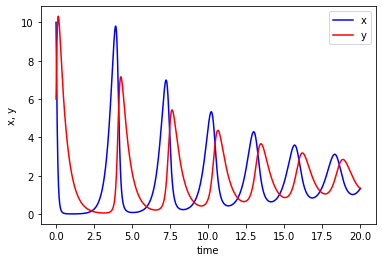
****

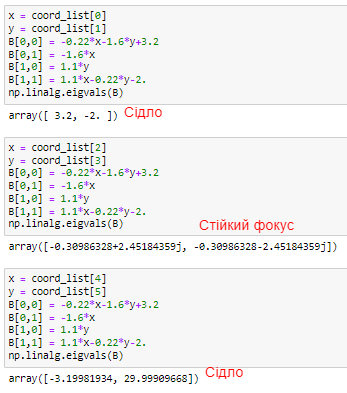
**А)**

****

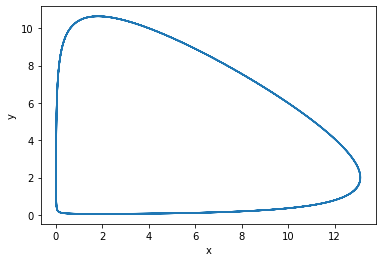
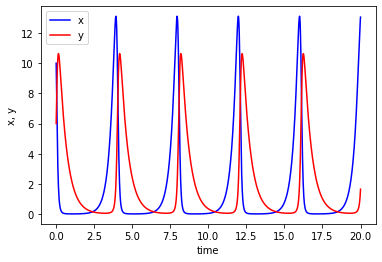


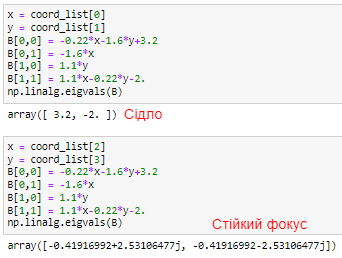
**Б)**

****

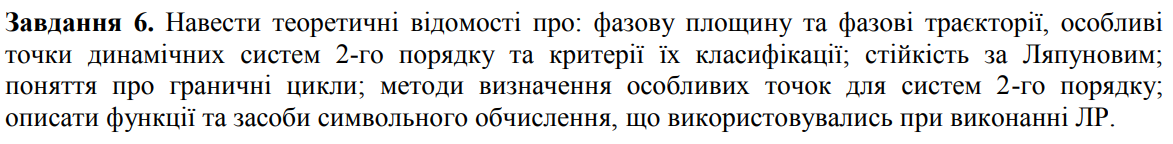
****

**В)**





При відсутності міжвидової конкуренції однієї з популяції кількість особливих точок стає 3. Коли міжвидова конкуренція відсутня ми маємо справу із класичною моделлю Лоткі-Вольтера без логістичної поправки.

****

Фазова площина - координатна площина, в якій по осях координат відкладаються будь-які дві змінні (фазові координати), що однозначно визначають стан системи другого порядку.

Фазова траєкторія - крива у фазовому просторі, складена з точок, що зображують стан динамічної системи в послідовні моменти часу протягом усієї еволюції.Зміні стану системи в часі відповідає рух фазової точки вздовж фазової траєкторії. Через кожну точку фазової площини проходить лише одна фазова траєкторія, крім особливих точок. Стрілки на фазових траєкторіях показують переміщення зображувальної точки з часом.

Точки фазового простору, які відповідають стаціонарним станам системи  називають особливими точками фазового простору. Стійкість стаціонарних станів визначається характером змін в часі малих відхилень. Стійкість будь-якого стану (руху) динамічної системи визначається просто: вводиться невелике відхилення (збурення) динамічної системи від досліджуваного стану і аналізується її подальша поведінка. Якщо з часом система повернеться в початковий стан (збурення загасає), то такий стан - стійкий. Якщо початкове відхилення наростає з часом - стан нестійкий.

Особливі точки класифікуються за коренями Якобіану:

1) Корені дійсні і одного знаку > 0 – стійкий вузол;

2) Корені дійсні і одного знаку < 0 – нестійкий вузол;

3) Корені дійсні та різних знаків – сідло;

4) Корені комплексно-спряжені і < 0 – стійкий фокус;

5) Корені комплексно-спряжені і > 0 – нестійкий фокус;

6) Корені комплексно-спряжені і = 0 – центр;

7) Комплексні, уявна частина = 0, а дійсна < 0 – стійкий вузол;

8) Комплексні, уявна частина = 0, а дійсна > 0 – нестійкий вузол;

9) Комплексні, уявна частина не = 0, а дійсна < 0 – стійкий фокус;

10) Комплексні, уявна частина не = 0, а дійсна > 0 – нестійкий фокус;

11) Комплексні, < 0 – сідлова точка.

12) Комплексні, дійсні частини = 0 – центр;

Стійкість стаціонарних станів визначається характером змін в часі малих відхилень , які задовольняють наступну систему лінійних диференційних рівнянь:

Розв’язок цієї системи можна представити у вигляді:

, де пропорційні величинам початкових відхилень, – показники Ляпунова, які знаходяться з рівняння:

Де – символ Кронекера = .

Стаціонарний стан є стійким, якщо для всіх виконується умова . Якщо хоча б один , то стан нестійкий. Якщо хоча б один з показників = 0, то стан називається нейтаральним та для аналізу стійкості потрібно розглянути члени розкладу більш виского порядку.

Граничний цикл — замкнута траєкторія у фазовому просторі двовимірної динамічної системи, до якої збігається хоча б одна фазова траєкторія при або при . Граничний цикл:

* Стійкий, якщо траєкторії збігаються до замкнутої кривої по спіралі з обох боків при .
* Нестійким якщо траєкторії збігаються до замкнутої кривої по спіралі з обох боків при .
* Напівстійким якщо траєкторії збігаються до замкнутої кривої по спіралі при з одного боку та при з іншого, або навпаки.

Особливі точки можна знайти з розв’язків системи диференціальних рівнянь 2-го порядку, праві частини яких прирівняні до нуля. Тип особливих точок можна визначити на основі фазових траєкторій або прирівняти детермінант матриці часткових похідних правих частин рівнянь цієї системи (Якобіан) до 0 та знайти розв’язки (власні числа). В залежності від них можна зробити висновки про тип особливих точок.

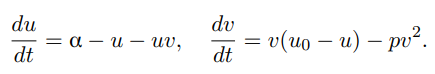
***Функції та засоби символьного обчислення, що використовувались при виконанні***

1. numpy представляє бібліотеку типів та функцій для роботи з масивами та матрицями, і є мультимодульним пакетом.
   1. Array() – функція для створення масива із списка;
   2. linspace(a,b,N) – функція для створення масива N чисел, рівномірно розподілених на заданому відрізку;
   3. zeros – функція, що генерує масив з усіма нулями.
2. numpy.linalg – модуль бібліотеки numpy «лінійна алгебра».
   1. eigvals – функція, що обчислює власні числа матриці.
3. scipy – бібліотека математичних процедур.
4. scipy.linalg – модуль бібліотеки scipy «лінійна алгебра».
5. scipy.integrate – модуль з функціями, що призначені для вирішення систем звичайних ДР першого порядку з початковими умовами в одній точці.
   1. odeint – ODE integrator.
6. pylab – модуль, який імпортує matplotlib, pyplot (для побудови графіків) та NumPy в одному просторі імен.
   1. plot – інструкція, що будує графік у пам'яті;
   2. xlabel – опція, що задає параметр графіка «підпис осі x»;
   3. ylabel – опція, що задає параметр графіка «підпис осі y»;
   4. legend – опція, що задає легенду графіка, наприклад, відповідність змінній певного кольору на графіку;
   5. show – команда, що відображає графік в окремому вікні.
7. sympy – пакет, за допомогою якого можна вирішувати такі завдання: розв'язання рівнянь та систем, інтегрування та диференціювання, обчислення границь, розкладання в ряд та підсумовування рядів, пошук розв'язання диференціальних рівнянь та систем, спрощення виразів, тощо.
   1. symbols – функція для створення символьних змінних;
   2. Symbol – клас символьних змінних;
   3. Eq – функція для перевірки рівності виразів;
   4. solve – розв’язує систему лінійних рівнянь;
   5. sympify – функція для перетворення рядка на символьний вираз;
   6. diff – функція, що обчислює кінцеві різниці n-го порядку масиву вздовж заданої осі.

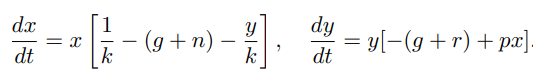
**Висновки**

Математична модель Лотки-Вольтера (часто її називають моделлю «хижак-жертва») застосовна для опису різних процесів у біології, екології, медицині, у соціальних дослідженнях, в історії, в радіофізиці та інших науках. Наприклад,

Модель взаємодії забруднення із навколишнім середовищем:

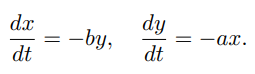


Модель класової боротьби (модель Гудвіна):

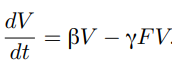
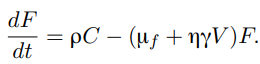


Модель безкласового суспільства доби охотників-збирачів;

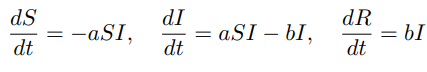
Модель воєнних дій (жорстка, м’яка):



Вірусна модель інфекційного захворювання:

Модель поширення епідемій, включаючи модель зараження вірусом комп'ютерів:



Модель взаємодії когнітивних та/або емоційних мод мозку:

